

ÖNGERİLMELİ ŞERİT-PLAĞIN EĞİLMESİ DURUMUNDA İÇERDİĞİ DAİRESEL DOLGULAR ARASINDAKİ KARŞILIKLI ETKİ

Nazmiye YAHNİOĞLU ve Ülkü BABUŞCU YEŞİL

YTÜ, Kimya-Metalürji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü,
Davutpaşa Yerleşim Birimi, 34210 Esenler, İSTANBUL

ÖZET

Bu çalışmada, basit mesnetli dairesel iki dolgu içeren şerit-plağın öngerilmesinin, bu şerit-plağın eğilmesi durumunda dolgular civarında oluşan gerilme yığılmasına etkisi sonlu elemanlar yöntemi yardımıyla incelenmiştir. Ele alınan uygun sınır değer problemlerinin matematiksel modeli, düzlem şekil değiştirme durumunda Lineerize Edilmiş Üç Boyutlu Elastisite Teorisi (TDLTE) çerçevesinde yapılmıştır. Şerit-plağın her bir bileşeninin malzemesi izotrop olarak seçilmiştir. Sayısal sonuçlar, grafikler ve tablolar şeklinde verilmiştir. Sayısal sonuçlardan, dairesel dolgular civarında oluşan gerilme dağılımının öngerilme ve dairesel dolgular arasındaki uzaklığa bağlı olarak önemli ölçüde değiştiği görülmektedir.

Anahtar Sözcükler: Öngerilme, dairesel dolgu, gerilme yığılması, sonlu elemanlar yöntemi

ABSTRACT

In this work the influence of the initial stretching of a simply-supported plate-strip containing two neighbouring circular inclusions on the stress concentration around the inclusions caused by the bending of the strip have been examined using the Finite Element Method. The mathematical formulation of the corresponding boundary-value problem is presented in the framework of the Three-Dimensional Linearized Theory of Elasticity (TDLTE) under a plane-strain state. The material of the each components of plate-strip is selected as isotropic. The numerical results have been shown in diagrams and table. From the numerical results, it was observed that the stress distributions around the circular inclusions were changed significantly with initial stretching force and the distance between the holes.

Keywords: Initial stretching, circular inclusion, stress concentration, finite element method

1. GİRİŞ

Dış kuvvetler etkisinde yapı elemanı ya da bileşenlerinin mukavemetinin belirlenmesinde, bu yapı elemanı ya da bileşenlerinin yapıldığı malzemenin içerdiği delik, boşluk, dolgu gibi malzeme süreksizliklerinin etkisinin belirlenmesi önemli yer tutar. Çünkü teknolojik işlemlerin uyumsuzluğu, klasik malzemeler dışında yeni malzemelerin kullanılması,

hasarların onarımı v.b.gibi nedenlerle kaçınılmaz olarak bu tür durumlar ile karşılaşılır. Bilindiği üzere, malzeme süreksizliklerinin sınırlarında gerilme yığılmaları oluşur ki, yapı elemanının üstlendiği görevi güvenle yerine getirebilmesi için bu gerilme yığılmalarının belirli limitler altında kalması istenir.

Yapısında çeşitli formda delik/boşluk/dolgu bulunan yapı elemanlarında çeşitli dış yükler etkisinde gerilme yığılmalarının belirlenmesi literatürde pek çok kaynakta verilmektedir [2,3,6-11]. Bu çalışmalarda çeşitli sınır koşulları ve malzeme anizotropisi göz önüne alınarak pek çok delik geometrisi için iki veya üç boyutlu modellenen problemler ele alınmış ve delikler civarında oluşan gerilme yığılmaları sayısal veya analitik yöntemlerle incelenmiştir.

Söz konusu çalışmalar içerisinde güncellik açısından önemli olanlar öngörilmeli ortamlara ait olan çalışmalardır, örneğin, [2, 6, v.s.] 'de olduğu gibi.

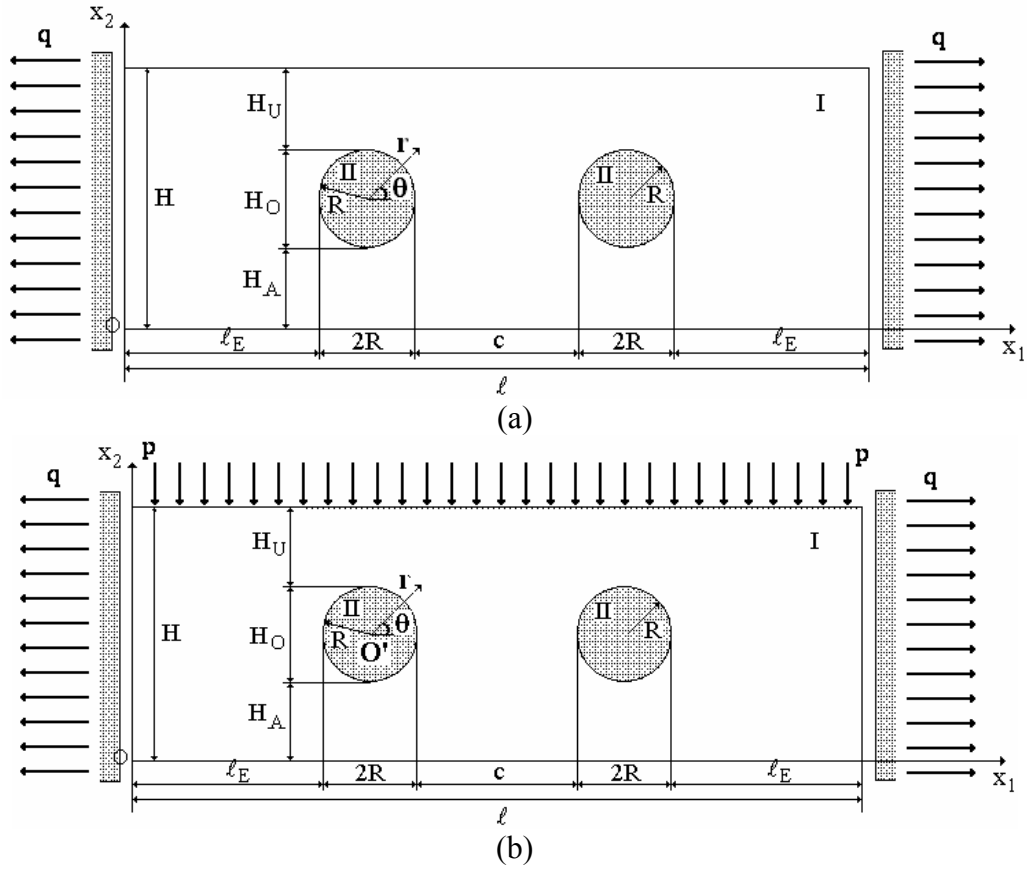
Yapıdaki ön gerilmenin göz önüne alınabilmesi lineer elastisite teorisi çerçevesinde mümkün değildir. Bu problemlerin matematiksel modellemesi Üç Boyutlu Lineerize Edilmiş Elastisite Teorisi çerçevesinde yapılmaktadır [4].

Ele alınan bu çalışmada dairesel iki dolgu içeren sonlu şerit-levhanın kenarlarından çekilmesi ile yapıda oluşan gerilme yayılımı altında, üst yüzeyine etkiyen ilave yükleme etkisinde dolgular civarında oluşan gerilme yığılması, düzlem şekil değiştirme durumunda Üç Boyutlu Lineerize Edilmiş Elastisite Teorisinin kesin denklemleri çerçevesinde Sonlu Elemanlar Yöntemi yardımıyla sayısal olarak incelenmiştir. Kullanılan Yer Değiştirme Esaslı Sonlu Elemanlar Yöntemi nedeniyle ortaya çıkan süreksiz gerilme dağılımları En küçük Kareler Yöntemi (LSM) kullanılarak süreklileştirilmiştir [5,12].

2. PROBLEMİN MATEMATİKSEL MODELİ

Bu çalışmada, karşılıklı iki kenarından basit mesnetle tutturulmuş ve merkezleri serbest yüzeye paralel bir doğrultu üzerinde bulunan aynı malzemeden yapılmış komşu iki dairesel dolgu içeren şerit-levha ele alınmıştır. Şerit-levhanın içerdiği dolguların ve onları saran malzemenin birbirinden farklı ve izotrop olduğu kabul edilmektedir. Şerit-levhanın, önce mesnetli kenarlarından yük şiddeti q olan düzgün yayılı yük etkisinde çekildiği (Şekil 1.a (I. aşama-ön gerilme)) ve daha sonra üst yüzeyine etkiyen yük şiddeti p ($p < q$) olan düzgün yayılı başka bir kuvvet (Şekil 1.b (II. aşama-ilave yükleme)) etkisinde eğilmesi durumunda, dolgular civarında oluşan gerilme yığılmaları ve bu gerilme yığılmalarına ön gerilme ile çeşitli geometrik ve malzeme parametrelerinin etkisi incelenecektir.

Şerit-plağa başlangıç durumunda Lagrange koordinatları ile üst üste düşen, $Ox_1x_2x_3$ kartezyen koordinat sistemi Şekil 1'de görüldüğü gibi tutturulmuştur. Ox_3 doğrultusu, Ox_1x_2 düzlemine dik olup Şekil 1'de gösterilmemiştir. I. aşama sonucunda yapıda oluşan gerilme, şekil değiştirme ve yer değiştirmelere sırasıyla ön-gerilme, ön-şekil değiştirme ve ön yer değiştirme adı verilecek ve ikinci durumda elde edilen büyüklüklerden ayırmak için bu büyüklükler üst indis "(0)" ile gösterilecektir. I. aşamaya ait yapıda oluşan gerilme yayılımının belirlenmesi için aşağıda verilen sınır değer problemi çözülür.



Şekil 1. Çözüm bölgesi ve yükleme a) sadece ön gerilme yüklemesi olması durumu (I. aşama), b) ön gerilme ve ilave yüklemenin birlikte olması durumu (II. aşama)

Ele alınan sınır değer probleminin çözüm bölgesi (Şekil 1)

$$\Omega' = \Omega \cup \Omega_L \cup \Omega_R = \{0 \leq x_1 \leq \ell, 0 \leq x_2 \leq H, -\infty \leq x_3 \leq \infty\} \quad (1)$$

dir. (1)'de,

$$\begin{aligned} \Omega_L &= \{(x_1, x_2) \mid (x_1 - (\ell_E + R))^2 + (x_2 - (H_A + R))^2 \leq R^2\} \\ \Omega_R &= \{(x_1, x_2) \mid (x_1 - (\ell - (\ell_E + R)))^2 + (x_2 - (H_A + R))^2 \leq R^2\} \end{aligned} \quad (2)$$

ve Ω dolguları saran bölgeyi göstermektedir. Ω' bölgesinde sağlanan denge denklemleri,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0),k}}{\partial x_j} = 0 \quad i, j, k = 1, 2 \quad (3)$$

bünye denklemleri,

$$\sigma_{11}^{(0),k} = (\lambda_k + 2\mu_k)\epsilon_{11}^{(0),k} + \lambda_k\epsilon_{22}^{(0),k}; \quad \sigma_{22}^{(0),k} = \lambda_k\epsilon_{11}^{(0),k} + (\lambda_k + 2\mu_k)\epsilon_{22}^{(0),k}$$

$$\sigma_{12}^{(0),k} = 2\mu_k \varepsilon_{12}^{(0),k} ; \lambda_k = \frac{\nu_k E_k}{(1+\nu_k)(1-2\nu_k)}, \mu_k = G_k = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)} \quad (4)$$

yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları,

$$\varepsilon_{ij}^{(0),k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(0),k}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0),k}}{\partial x_i} \right), i,j; k=1,2 \quad (5)$$

ve sınır koşulları,

$$\begin{aligned} u_2^{(0),1} \Big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2 \in [0,H]}} = 0, \sigma_{11}^{(0),1} \Big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2 \in [0,H]}} = q, \sigma_{12}^{(0),1} \Big|_{\substack{x_1=0;\ell \\ x_2 \in [0,H]}} = 0, \sigma_{i2}^{(0),1} \Big|_{\substack{x_2=0;H \\ x_1 \in [0,\ell]}} = 0, \\ u_{iL}^{(0),1} \Big|_{C_L} = u_{iL}^{(0),2} \Big|_{C_L}; u_{iR}^{(0),1} \Big|_{C_R} = u_{iR}^{(0),2} \Big|_{C_R} \\ (6) \\ \sigma_{jiL}^{(0),1} n_j \Big|_{C_L} = \sigma_{jiL}^{(0),2} n_j \Big|_{C_L}, \sigma_{jiR}^{(0),1} n_j \Big|_{C_R} = \sigma_{jiR}^{(0),2} n_j \Big|_{C_R}, i,j=1,2 \end{aligned} \quad (6)$$

burada

$$\begin{aligned} C_L &= \left\{ (x_1, x_2) \mid (x_1 - (\ell_E + R))^2 + (x_2 - (H_A + R))^2 = R^2 \right\} \\ C_R &= \left\{ (x_1, x_2) \mid (x_1 - (\ell - (\ell_E + R)))^2 + (x_2 - (H_A + R))^2 = R^2 \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

olarak verilebilir. Belirtelim ki, (3)-(5) ifadelerinde $\sigma_{ij}^{(0),k}$, $\varepsilon_{ij}^{(0),k}$ ve $u_i^{(0),k}$ 'ler ele alınan yapı elemanının 1. aşamada elde edilen sırasıyla ön-gerilme, ön-şekil değiştirme tansörleri ile ön-yer değiştirme vektörü bileşenlerini ve $k=1$ ($k=2$) için, uygun büyüklüğün dolguları saran malzemeye (dolgu malzemesine) ait olduğunu, λ_k ve G_k ilgili malzemeye ait sırasıyla Lamé sabiti ve kayma modülünü; ν_k ve E_k , sırasıyla Poisson oranı ve Elastisite modülünü göstermektedir. Ayrıca, (6)'da C_L (C_R) yapı elemanının içerdiği soldaki (sağdaki) dolgunun sınırını; n_j , dolgu sınırlarındaki dış birim normalin bileşenlerini göstermektedir [1,8].

İlave yüklemekten dolayı yapıda oluşan gerilme yayılımının belirlendiği 2. aşamaya ait denklem ve bağıntılar, 1. aşamada elde edilen ön-gerilmelerin ($\sigma_{ij}^{(0),k}$)'de göz önüne alındığı Üç Boyutlu Lineerize Edilmiş Elastisite teorisi çerçevesinde belirlenen ve aşağıda verilen sınır değer probleminin çözülmesiyle belirlenir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{ji}^k + \sigma_{in}^{(0),k} \frac{\partial u_i^k}{\partial x_n} \right) &= 0 \\ \sigma_{11}^k &= (\lambda_k + 2\mu_k) \varepsilon_{11}^k + \lambda_k \varepsilon_{22}^k, \sigma_{22}^k = \lambda_k \varepsilon_{11}^k + (\lambda_k + 2\mu_k) \varepsilon_{22}^k, \sigma_{12}^k = 2\mu_k \varepsilon_{12}^k \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{ij}^{,k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{,k}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{,k}}{\partial x_i} \right), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} u_2^{,1} \Big|_{x_1=0;\ell} &= 0, \quad \left(\sigma_{11}^{,1} + \sigma_{1n}^{(0),1} \frac{\partial u_1^{,1}}{\partial x_n} \right) \Big|_{x_1=0;\ell} = 0, \quad \sigma_{12}^{,1} \Big|_{x_2=H} = p \delta_1^2, \\ \sigma_{12}^{,1} \Big|_{x_2=0} &= 0, \quad u_i^{,1} \Big|_{C_L} = u_i^{,2} \Big|_{C_L}, \quad u_i^{,1} \Big|_{C_R} = u_i^{,2} \Big|_{C_R}, \\ \left(\sigma_{jiL}^{,1} + \sigma_{inL}^{(0),1} \frac{\partial u_{iL}^{,1}}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_{C_L} &= \left(\sigma_{jiL}^{,2} + \sigma_{inL}^{(0),2} \frac{\partial u_{iL}^{,2}}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_{C_L}, \\ \left(\sigma_{jiR}^{,1} + \sigma_{inR}^{(0),1} \frac{\partial u_{iR}^{,1}}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_{C_R} &= \left(\sigma_{jiR}^{,2} + \sigma_{inR}^{(0),2} \frac{\partial u_{iR}^{,2}}{\partial x_n} \right) n_j \Big|_{C_R} \\ \delta_1^2 &= 0, \delta_2^2 = 1, \quad i,j;n=1,2; k=1,2 \end{aligned} \quad (9)$$

Dolayısı ile ele alınan problemin matematiksel modeli, 1. aşamada (3)-(5) denklemler takımının (6) sınır koşulları çerçevesinde; 2. aşamada, 1. aşamada elde edilen ön gerilmelerin de dahil edildiği (8) denklemler takımının (9) sınır koşulları çerçevesinde çözülmesine getirilir. Belirtelim ki, elde edilen son gerilme yayılımı Lineer Elastisite Teorisinde kullanılan superpozisyon ilkesi yardımıyla elde edilemez. Çünkü, superpozisyon ilkesinde yüklerin ayrı ayrı etkimleri sonucunda elde edilen değerlerin toplanması esastır. Oysa bu durum gerçeği yansıtmaz çünkü, yapıdaki ön gerilme ilave yüklemekten doğacak gerilme (veya şekil değiştirme) yayılımına doğrudan etki gösterir. İşte bu etki superpozisyon prensibi çerçevesinde elde edilemez [2,4].

3. SONLU ELEMENLAR MODELİ

Ele alınan sınır değer probleminin 1. aşaması için Sonlu Elemanlar Modeli, dış kuvvetler etkisinde cisimde biriken toplam potansiyel enerjiyi gösteren

$$\Pi^{(0)} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega'} \sigma_{ij}^{(0),k} \varepsilon_{ij}^{(0),k} dx_1 dx_2 - \int_0^H q u_1^{(0),1} \Big|_{x_1=0} dx_2 + \int_0^H q u_1^{(0),1} \Big|_{x_1=\ell} dx_2 \quad (10)$$

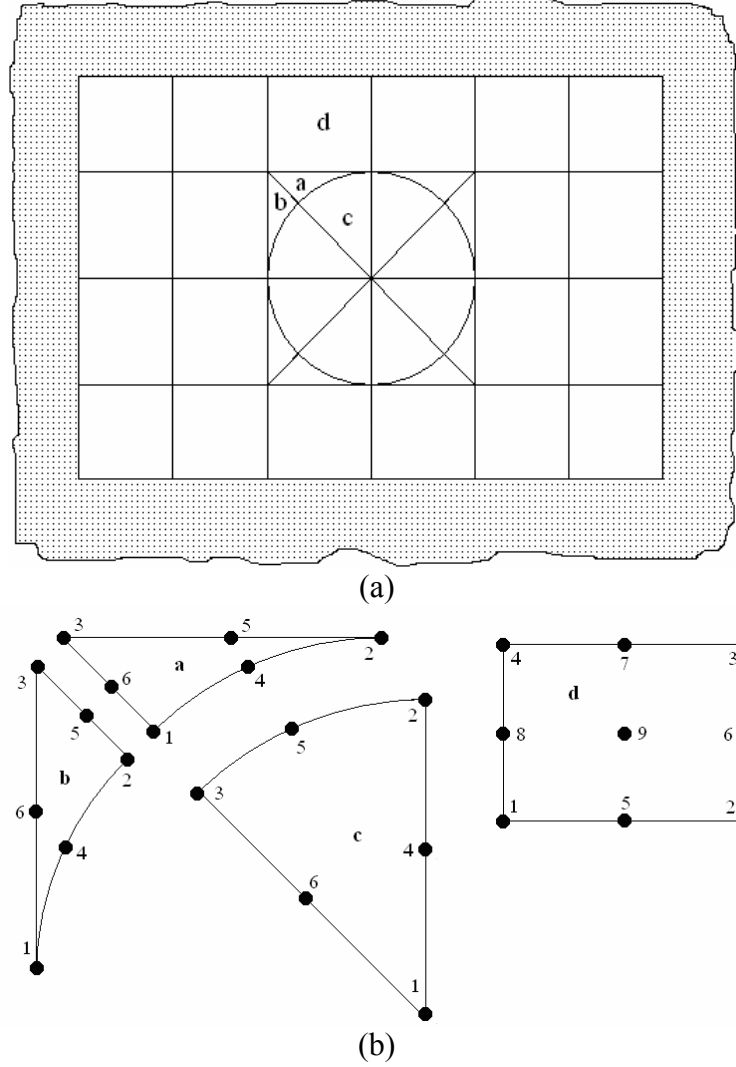
fonksiyoneli yardımıyla, ikinci aşamasına ait sonlu eleman modeli

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega'} \left(T_{ij}^{,k} \frac{\partial u_j^{,k}}{\partial x_i} \right) dx_1 dx_2 - \int_0^\ell p u_2^{,1} \Big|_{x_2=H} dx_1 \quad (11)$$

fonksiyoneli yardımıyla yapılacaktır [12]. (11)'de,

$$T_{ij}^{,k} = \sigma_{ij}^{,k} + \sigma_{in}^{(0),k} \frac{\partial u_i^{,k}}{\partial x_n} \quad (12)$$

dir. (10) ve (11) fonksiyonlarının ayrı ayrı birinci varyasyonlarının sıfıra eşitliğinden sırasıyla (3) ve (8)'de verilen diferansiyel denklemler ile (6) ve (9)'da verilen gerilmelere göre sınır koşulları elde edilir [2,12].



Şekil 2 a)Dairesel delgu civarındaki sonlu eleman ağı,
b) Bazı sonlu elemanlar ve nodların konumu

(10) ve (11) fonksiyonları ve Ritz tekniği yardımıyla her iki aşamaya ait sonlu eleman modellemesi ayrı ayrı elde edilir. Her iki aşama için ele alınan problemin Sonlu Elemanlar Yöntemi ile çözümü için, problemin çözüm bölgesi Ω' (Şekil 1) sonlu sayıda Ω_n ($n = 1, 2, \dots, M$) sonlu elemanlarına ayrıştırılır ve

$$\Omega' = \bigcup_{n=1}^M \Omega_n \quad (13)$$

dir. Şekil 2’de dairesel dolguyu içeren bir bölgenin sonlu eleman ağı ve kullanılan bazı sonlu elemanlar ile nodların konumu verilmektedir. Ele alınan dikdörtgen sonlu elemanların nodlarında tanımlanan ikinci dereceden standart Lagrange şekil fonksiyonlarının normalize edilmiş koordinatlardaki (O'ξη) ifadeleri

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - \eta); N_2 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - \eta); N_3 = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 + \eta); \\ N_4 &= \frac{1}{4}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 + \eta); N_5 = \frac{1}{4}(\xi^2 - 1)(\eta^2 - \eta); N_6 = -\frac{1}{2}(\xi^2 + \xi)(\eta^2 - 1); \\ N_7 &= -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1)(\eta^2 + \eta); N_8 = -\frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)(\eta^2 - 1); N_9 = (\xi^2 - 1)(\eta^2 - 1) \end{aligned} \quad (14)$$

olur [12]. Yerel O'ξη koordinat takımı ile genel Ox₁x₂ kartezyen koordinat takımı arasında dönüşümü sağlayan bağıntı

$$\xi = \frac{2x_1 - (x_{i+1} + x_i)_1}{(x_{i+1} - x_i)_1}, \quad \eta = \frac{2x_2 - (x_{i+1} + x_i)_2}{(x_{i+1} - x_i)_2} \quad (15)$$

ile verilebilir. (15)’de (x_{i+1} + x_i)₁ ((x_{i+1} + x_i)₂), Ox₁ (Ox₂) doğrultusunda i. sonlu elemanın üst ve alt nodların koordinatlarının toplamı; (x_{i+1} - x_i)₁ ((x_{i+1} - x_i)₂), Ox₁ (Ox₂) doğrultusunda i. sonlu elemanın üst ve alt nodların koordinatlarının farkıdır.

Üçgen sonlu elemanların nodlarında tanımlı şekil fonksiyonlarının genel koordinatlardaki ifadesi

$$N_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y + d_i x^2 + e_i xy + f_i y^2 \quad (16)$$

dir [12]. (16)’daki bilinmeyen katsayılar her sonlu elemana ait nod için

$$N_i(x_{1j}, x_{2j}) = \delta_{ij} \quad (17)$$

tanımından bulunur [12]. (17)’de (x_{1j}, x_{2j}), j. nodun Ox₁x₂ koordinat takımındaki koordinatları, δ_{ij} Kronecker sembolüdür.

Aranan çözüm, yöntem gereği, her bir sonlu elemanda polinom şeklinde seçilir. Bu çalışmada, Yer değiştirme Esaslı Sonlu Elemanlar Yöntemi kullanıldığından her bir sonlu elemanda aranan fonksiyon yer değiştirme fonksiyonudur. Dolayısıyla 1. aşama için,

$$\mathbf{u}^{(0),k,n} \approx \mathbf{N}^{,n} \mathbf{a}^{(0),k,n}, \quad k = 1, 2; n = 1, 2, \dots, M \quad (18)$$

veya ikinci aşama için,

$$\mathbf{u}^{,k,n} \approx \mathbf{N}^{,n} \mathbf{a}^{,k,n}, \quad k = 1, 2; n = 1, 2, \dots, M \quad (19)$$

seçilir. (18) ve (19)’da altı çizili indislerle göre Einstein toplama uylası uygulanmayacaktır. Ayrıca (18)’de

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{u}^{(0),k,n} \right)^T &= \left(u_1^{(0),k,n}(x_1, x_2) \quad u_2^{(0),k,n}(x_1, x_2) \right), \\ \left(\mathbf{a}^{(0),k,n} \right)^T &= \left(u_{11}^{(0),k,n} \quad u_{21}^{(0),k,n} \quad \dots \quad u_{2s}^{(0),k,n} \quad u_{2s}^{(0),k,n} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

(19)'da

$$\left(\mathbf{u}^{k,n} \right)^T = \left(u_1^{k,n}(x_1, x_2) \quad u_2^{k,n}(x_1, x_2) \right), \quad \left(\mathbf{a}^{k,n} \right)^T = \left(u_{11}^{k,n} \quad u_{21}^{k,n} \quad \dots \quad u_{2s}^{k,n} \quad u_{2s}^{k,n} \right) \quad (21)$$

dir ve

$$\mathbf{N}^{,n} = \begin{pmatrix} N_1^{,n} 0 & N_2^{,n} 0 & N_3^{,n} 0 & N_4^{,n} 0 & \dots & N_{s-1}^{,n} 0 & N_s^{,n} 0 \\ 0 & N_1^{,n} 0 & N_2^{,n} 0 & N_3^{,n} 0 & N_4^{,n} \dots & 0 & N_{s-1}^{,n} 0 & N_s^{,n} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots, M \quad (22)$$

şeklindedir. (20) ve (21)'de alt indis s, üçgen sonlu elemanlar için s=6 ve dikdörtgen sonlu elemanlar için s=9 alınmalıdır. Yine bu ifadelerde “n” üst indisi, ele alınan büyüklüğün Ω_n sonlu elemanına ait olduğunu göstermektedir. (18)'deki $\mathbf{a}^{(0),k}$ veya (19)'daki $\mathbf{a}^{,k}$ vektörünün bileşenleri, Ω_n sonlu elemanın nodlarındaki yer değiştirmelerdir. Her sonlu elemanda 1, aşama için (18) (2, aşama için (19)) şeklinde seçilen çözümler (10) fonksiyoneline ((11) fonksiyoneline) yerine yazılır ve bilinen Ritz tekniği yardımıyla 1. ve 2. aşama için

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F} \quad (23)$$

lineer denklem sistemine ulaşılır. (23)'de **K**-Rijidlik, **u**-bilinmeyenleri içeren ve **F**-sağ taraf matrisleridir. (23) denklem sistemi çözülerek, her bir nodda aranan fonksiyonun değerleri elde edilir.

Bilindiği üzere sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen çözüm, bütün bölgede C^0 sürekliliğine sahiptir. Dolayısıyla sonlu eleman çözümünden elde edilen (18) veya (19) yer değiştirme fonksiyonu kullanılarak, 1. aşama için (5) ve (4) veya ikinci aşama için (18) yardımıyla bulunan gerilme fonksiyonları, sonlu eleman sınırlarında süreksiz olur. Bu ise, ancak yöntemden kaynaklanan bir durumdur. Bu nedenle gerilme fonksiyonları Hinton, E. ve Campell, J.(1979)'da önerilen şekilde, yeniden Sonlu Elemanlar Yöntemi ve En Küçük Kareler Yöntemi yardımıyla modellenerek süreklileştirilmiştir (variational recovery) [5,12]. Ancak sayısal değerlerin incelenmesinde kutupsal koordinatlardaki gerilme değerleri daha elverişli olduğundan, $x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$ koordinat dönüşümü için,

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - (\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (24)$$

kullanılarak, gerilmelerin kutupsal koordinatlardaki değerleri verilmiştir [9].

4. SAYISAL SONUÇLAR

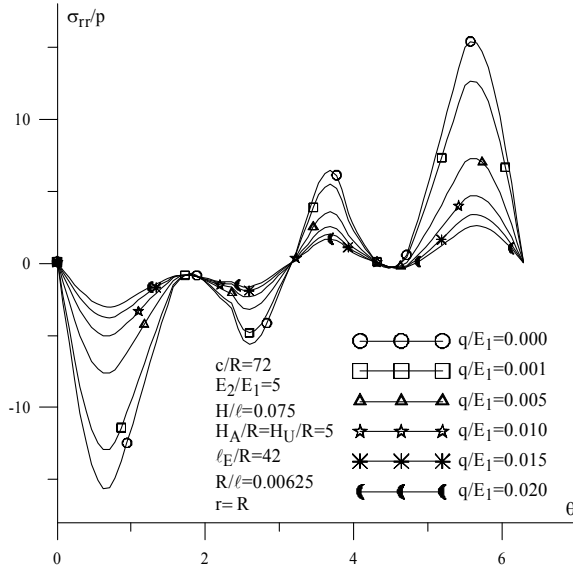
Sayısal sonuçların elde edilmesinde ele alınan yapı elemanını oluşturan bileşenlerin (dolgular ve onu saran malzeme) malzemesinin birbirinden farklı ve izotrop olduğu kabul edilmiştir. Matematiksel temsil olarak dolgu malzemelerine ait büyüklükler alt indis “2”, onları saran malzemeye ait büyüklükler alt indis “1” ile gösterilecektir. Buna göre, ele alınan yapının bileşenlerinin malzemesine ait mekanik sabitler: Dolgu malzemesi (dolguları saran malzeme) için E_2 (E_1) Elastisite Modülü, ν_2 (ν_1) Poisson oranı, λ_2 (λ_1) Lamé sabiti, μ_2 (μ_1) Kayma Modülüdür.

Bu çalışmada, sayısal sonuçların elde edilmesinde kullanılan program ve algoritmalar tarafımızdan yapılmış olup, problem ve sınır koşullarının $x_1 = \ell/2$ ’ye göre simetrik olması özelliğinden yararlanılarak, çözüm yarım bölgede yapılmıştır. Çözüm için kullanılan sonlu eleman ağı, 16 eğrisel kenara sahip üçgen sonlu eleman ve 956 dikdörtgen sonlu eleman, 4041 nod ve 8032 serbestlik derecesine sahiptir.

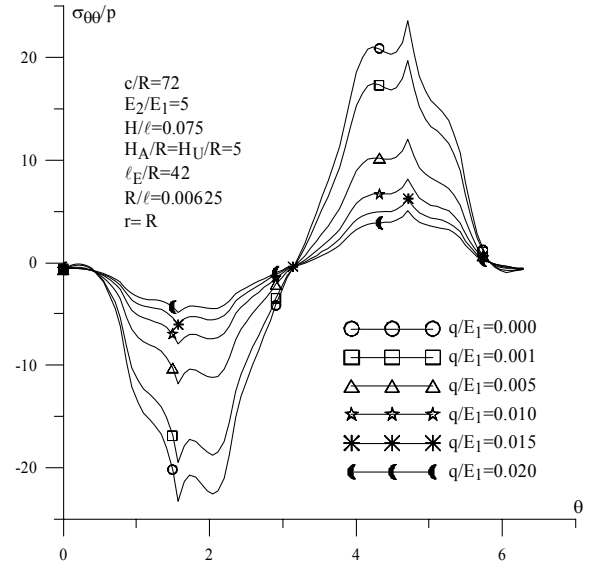
Belirtelim ki, Şekil 3-Şekil 6’daki grafiklerde $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $R/\ell = 0.00625$, $H/\ell = 0.075$ alınmış ve diğer parametre değerleri şekiller üzerinde verilmiştir. Şekil 3’de ilave yüklemekten dolayı yapıda oluşan σ_{rr}/p gerilmesinin $r=R$ dolgu sınırında, q/E_1 ön gerilme parametresine göre değişimi verilmektedir. Grafiklerden görüldüğü gibi ön gerilme arttıkça, gerilme yığılması mutlak değerce düşmektedir. $\sigma_{\theta\theta}/p$ ve $\sigma_{r\theta}/p$ gerilmeleri için aynı parametre değişimindeki grafikleri sırasıyla Şekil 4 ve Şekil 5’de verilmektedir. Bu grafiklerden de ön gerilmenin varlığının dolgu sınırında oluşan gerilme yığılmasını önemli ölçüde mutlak değerce düşürdüğü görülmektedir.

Şekil 6’da E_2/E_1 (dolgu malzemesi elastisite modülünün, onları saran malzemenin elastisite modülüne oranı) parametresi değişiminin ilave yüklemekten dolayı dolgu sınırında oluşan σ_{rr}/p gerilme yığılmasına etkisi, ön gerilme olduğu ($q/E_1 \neq 0$) ve olmadığı ($q/E_1 = 0$) durumda kıyaslanmaktadır. Şekilden görüldüğü gibi, E_2/E_1 oranının artması σ_{rr}/p gerilmesini mutlak değerce büyütürken $q/E_1 \neq 0$ olması aynı gerilme değerlerini düşürmektedir. Ayrıca bu grafiklerde $E_2/E_1 < 1$ olması durumu yani, dolgu malzemesinin elastisite modülünün, onu saran malzemeden küçük olması durumu da verilmiştir. Bu durumda ortaya çıkan gerilme yayılımının niteliği değişmemekle beraber $E_2/E_1 = 1$ durumunda elde edilen değerlerden mutlak değerce küçük kalmaktadır. Benzeri etkiler diğer gerilmeler içinde belirlenmiştir.

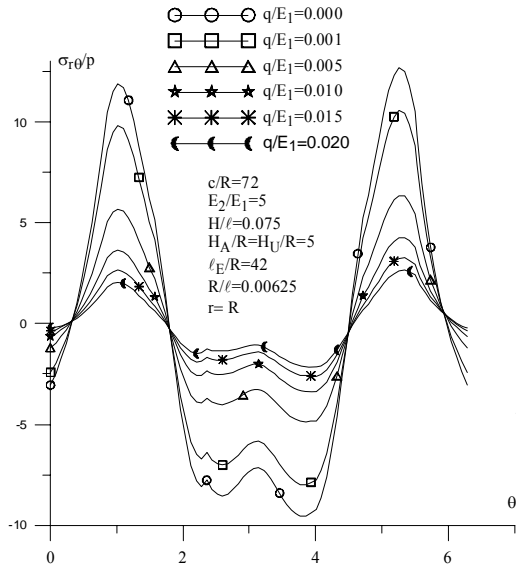
Tablo 1’de dolgu sınırında ($r=R$) ilave yüklemekten oluşan bazı noktalardaki gerilme yığılmasına, delikler arası mesafenin küçülmesi (c/R) etkisi verilmektedir. Tablo 1’deki sayısal verilerden $\theta \in (0, \pi)$ aralığındaki gerilme değerlerinin $\theta \in (\pi, 2\pi)$ aralığındaki gerilme değerleri ile zıt işarette olduğu ve bazı noktalar için hep büyük kaldığı görülmektedir. Yine c/R oranı küçüldükçe, $\theta \in (\pi/2, 3\pi/2)$ aralığındaki noktalardaki ($\theta = \pi$ hariç) gerilme değerlerinin mutlak değerce arttığı; $\theta \in (0, 2\pi/8)$ ile $\theta \in (14\pi/8, 2\pi)$ aralığındaki noktalardaki gerilme değerlerinin $c/R > 4$ için mutlak değerce azaldığı, ancak $c/R < 4$ için arttığı görülmektedir. Burada dolgular yapı içerisinde birbirine yaklaşıırken (c/R oranı düşerken), ilave yüklemenin dolgular civarında oluşturduğu etki değiştiğinden, dolguların karşılıklı etkisinin derecesini belirlemek zordur. Ancak böyle bir etkinin varlığı tablodaki sayısal verilerden söylenebilir.



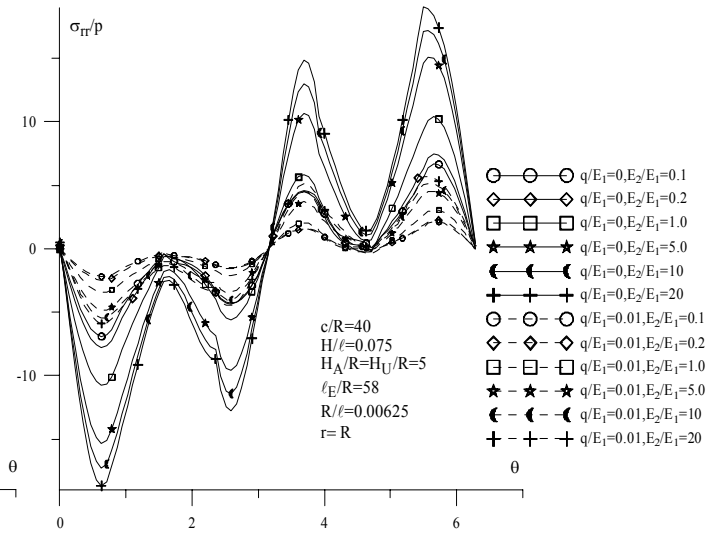
Şekil 3. Farklı q/E_1 değerleri için dolgu sınırında ($r=R$) σ_{rr}/p gerilmesi değerleri



Şekil 4. Farklı q/E_1 değerleri için dolgu sınırında ($r=R$) $\sigma_{\theta\theta}/p$ gerilmesi değerleri



Şekil 5. Farklı q/E_1 değerleri için dolgu sınırında ($r=R$) $\sigma_{r\theta}/p$ gerilmesi değerleri



Şekil 6. Farklı E_2/E_1 değerleri için ($r=R$) σ_{rr}/p gerilmesinin bazı q/E_1 için grafikleri

Tablo 1. σ_{rr}/p gerilmesinin dolgu sınırındaki bazı noktalarda ($r=R$) c/R parametresine göre aldığı değerler $H/\ell = 0.075$, $H_U/R = H_A/R = 5$, $E_2/E_1 = 5$, $R/\ell = 0.00625$, $q/E_1 = 0.005$

σ_{rr}/p	c/R						
θ	72	40	20	4	1	0.6	0.4
0	0.0878	0.1280	0.1477	0.1719	0.2508	0.3159	0.3670
$\pi/8$	-5.9911	-5.9005	-5.6920	-5.4678	-6.0310	-6.5430	-6.9862
$\pi/4$	-7.3672	-6.9649	-6.5658	-6.1884	-6.4309	-6.6245	-6.7828
$3\pi/8$	-4.2270	-3.7870	-3.4669	-3.1844	-3.1000	-3.0415	-2.9896
$\pi/2$	-1.1763	-1.2126	-1.2187	-1.2041	-1.1165	-1.0850	-1.0710
$5\pi/8$	-1.0991	-2.2148	-2.7621	-3.1190	-3.1343	-3.1522	-3.1763
$3\pi/4$	-2.0615	-3.7658	-4.5750	-5.0945	-5.1592	-5.1866	-5.2128
$7\pi/8$	-2.7562	-4.2583	-4.9398	-5.3572	-5.4365	-5.4701	-5.4985
π	-0.1225	-0.1676	-0.1852	-0.1891	-0.1792	-0.1744	-0.1705
$9\pi/8$	3.0689	4.6248	5.3207	5.7506	5.8525	5.8910	5.9211
$5\pi/4$	1.9762	3.7880	4.6395	5.1875	5.3000	5.3518	5.3966
$11\pi/8$	0.1018	1.1984	1.7353	2.0877	2.1259	2.1531	2.1842
$3\pi/2$	0.0409	0.0951	0.1098	0.1000	0.0347	0.0134	0.0071
$13\pi/8$	3.2944	2.8631	2.5454	2.2624	2.1918	2.1448	2.1074
$7\pi/4$	7.0603	6.8308	6.5192	6.2089	6.5644	6.8956	7.2052
$15\pi/8$	5.8333	5.6943	5.4623	5.2367	5.7884	6.2536	6.6495

KAYNAKLAR

- [1] Akbarov, S.D. and Guz', A.N., "Mechanics of Curved Composites", Kluwer Academic Publishers, London, (2000).
- [2] Akbarov S.D., N.Yahnioglu and A.M. Yucel, "On the influence of the initial tension of a strip with a rectangular hole on the stress concentration caused by additional loading", The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, V. 39, No 6, Pp: 615 – 624, (2004).
- [3] Bert, C.W., "Generalized Bending of a Plate with a Circular Inclusion of Arbitrary Rigidity", Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 36(3):341-345, (2001).
- [4] Guz, A.N., "Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies", Springer-Verlag, Berlin, (1999)

- [5] Hinton, E. and Campell, J., “Local and global smoothing of discontinuous finite element function using a least square method”, Int. J. Numerical Methods in Engineering. Vol. 8, pp:461-480, (1979).
- [6] Mermer A.M., “Dikdörtgen Delik İçeren Kompozit Şerit-Levhaların Eğilmesindeki Gerilme Yığılması Problemleri”, YTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, (2003).
- [7] Mura, T., “Inclusion Problems”, Appl Mech Rev, 41(1):15-20, (1988).
- [8] Savin, G.N., “Stress Concentration Around Holes”, E. Gros Translator, Pergomon, Oxford, (1961).
- [9] Timoshenko S.P., ve Goodier J.N., “Theory of Elasticity, Third Edition”, McGraw-Hill International Editions, London, (1970).
- [10] Yahnioglu, N. ve Mermer, A., (2001), “Kare Delik İçeren Çok Katlı Kompozit Malzemeden Oluşan Şerit-Plaktaki Gerilme Dağılımı”, XII. Ulusal Mekanik Kongresi, 10-14 Eylül 2001 Selçuk Üni.-Konya, Pp: 853-859. (2001).
- [11] Yeşil Ü.B., “Tek veya Çift Dairesel Delik İçeren Şerit Levhada Gerilme Yığılmasının Sonlu Elemanlarla İncelenmesi”, YTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, (2005).
- [12] Zienkiewicz, O.C. ve Taylor, R.L., “The Finite Element Methods: Basic Formulation and Linear Problems”, Vol. 1, 4th Ed., Mc Graw-Hill Book Company, Oxford, (1989).